断点回归

慧航

2024年6月

断点回归

断点回归（Regression discontinuity）用于政策变量仅仅取决于一个连续变量x（**running variable**），且在某个点$x=c$处，参与概率有跳跃的情况。

1. Sharp RD：

$$W_i = 1\left(X_i \geq c\right)$$

2. Fuzzy RD

$$\lim_{x \downarrow c} P\left(W_i | X_i = c\right) \neq \lim_{x \uparrow c} P\left(W_i | X_i = c\right)$$

- 优点：识别干净
- 缺点：外部有效性
- 例子：退休前后的消费情况

Sharp RD

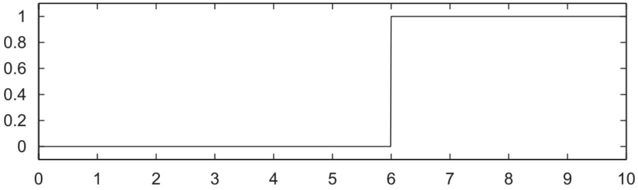


Fig. 1. Assignment probabilities (SRD).

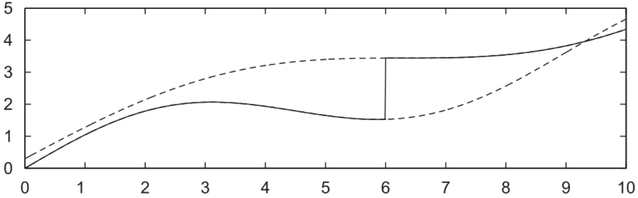


Fig. 2. Potential and observed outcome regression functions.

Sharp RD

政策效应：

$$\tau_{SRD} = \lim_{x \downarrow c} \mathbb{E}\left(Y_i | X_i = c\right) - \lim_{x \uparrow c} \mathbb{E}\left(Y_i | X_i = c\right)$$

估计：

1. 参数方法×
2. 非参数方法：
   1. 在$X = c$两边取两个小邻域计算均值
   2. Local constant
   3. Local polynomial (Local linear)：使用多项式在$X = c$两边（$(c-h, c+h)$）对outcome进行拟合

Sharp RD

令$S_i = 1\{X_i \geq c\}$，对于Sharp RD，即$S_i = W_i$，对于设定：

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \alpha + \tau \cdot S_i + S_i f_r(X_i - c) + (1 - S_i) f_l(X_i - c) + u_i \\
&= \alpha + \tau \cdot S_i + S_i \cdot f_r(X_i - c) + [1 - S_i] f_l(X_i - c) + u_i
\end{aligned}
$$

- 当$X_i < c$时:$Y_i = \alpha + f_l(X_i - c) + u_i$
  - 若$X_i \to c$，由于$f_l(0) = 0$，从而在$X_i = c$处的截距项为α
- 当$X_i > c$时:$Y_i = \alpha + \tau + f_r(X_i - c) + u_i$
  - 若$X_i \to c$，由于$f_r(0) = 0$，从而在$X_i = c$处的截距项为$\alpha + \tau$
- 因而τ就是在$X = c$处的jump，即此处的处理效应

Fuzzy RD

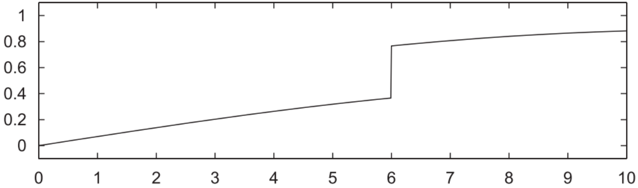


Fig. 3. Assignment probabilities (FRD).

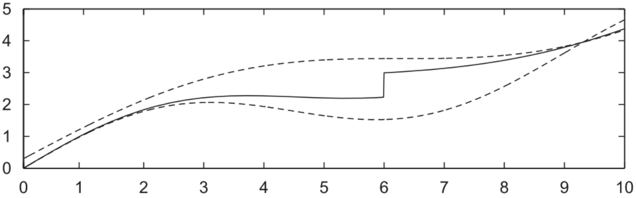


Fig. 4. Potential and observed outcome regression (FRD).

Fuzzy RD

对于Fuzzy RD，$S_i \neq W_i$。思想：S_i作为W_i的工具变量：

- Intention-to-treat (ITT)：

$$Y_i = \alpha_1 + \tau_{ITT} \cdot S_i + S_i \cdot f_r\left(X_i - c\right) + \left[1 - S_i\right] f_l\left(X_i - c\right) + u_i$$

- 政策概率：

$$W_i = \alpha_2 + \delta \cdot S_i + S_i \cdot g_r\left(X_i - c\right) + \left[1 - S_i\right] g_l\left(X_i - c\right) + v_i$$

- 结构方程：

$$Y_i = \alpha + \tau \cdot W_i + S_i \cdot h_r\left(X_i - c\right) + \left[1 - S_i\right] h_l\left(X_i - c\right) + \epsilon_i$$

Fuzzy RD

估计:

1. 根据以上可知:

$$\tau = \frac{\tau_{ITT}}{\delta}$$

   其中τ_{ITT}和δ都可以通过Local polynomial估计得到

2. 2SLS: 直接进行工具变量回归
   - 本质上RD的识别是一个LATE
   - 而LATE使用2SLS估计

断点回归

- Stata: rdrobust
- 多项式阶数选取
  - cross validation：对临近断点的观测进行预测
  - 一般不宜高过2，过高的多项式阶数导致不稳定
- 窗框选取
  - cross validation：对临近断点的观测进行预测
  - Calonico, Cattaneo and Titiunik(2014)

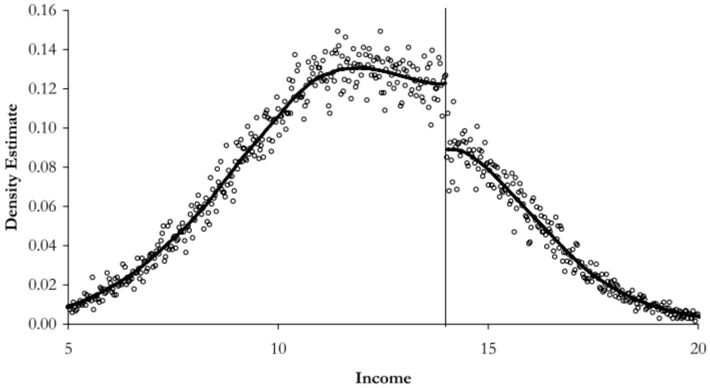
断点回归

一般步骤：

1. 画图
2. 检验manipulation
3. 推断
4. 稳健性检验

断点回归

检验manipulation： McCrary(2008)



Stata: rddensity

实例：意大利R&D

Bronzini and Iachini(2012) 研究了研发补贴对于企业的影响。背景：

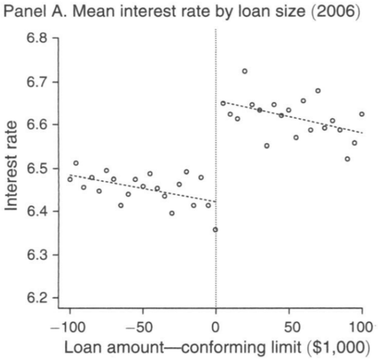
- 2003年，意大利Emilia-Romagna政府为了激励研发，实施了针对研发的补贴计划
- 能够被补贴的资质：通过打分确定，大于75分则可以接受补贴
- 断点：分数

聚束

如果存在操纵，是不是完全没有办法呢?

- 操纵本身也是理性选择的结果
- 操纵会带来密度函数在断点处的不连续
- 一种特殊的“操纵”：聚束（**bunching**）可能帮助我们识别一些关键参数
- 两种不同的聚束：
  - kink（拐点、弯折）
  - norch（切口？）

数据中的聚束


Panel A. Mean interest rate by loan size (2006)
Interest rate
6.8
6.7
6.6
6.5
6.4
6.3
6.2
−100
−50
0
50
100
Loan amount—conforming limit ($1,000)
Panel B. Loan size density
Fraction of loans
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
−400
−200
0
200
400
Loan amount—conforming limit ($1,000)

Kinks

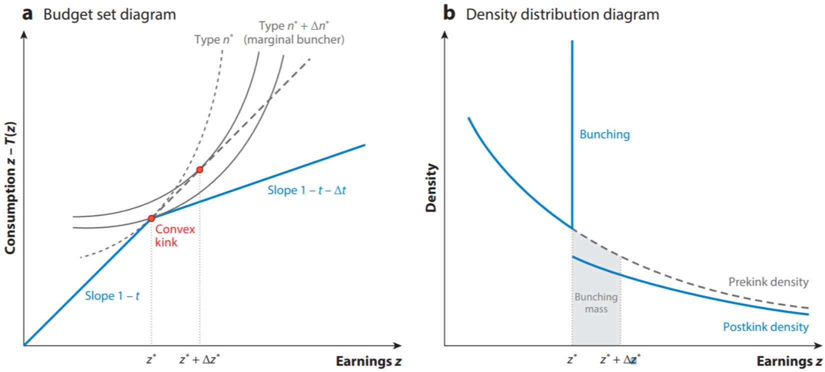
Kink最常见的例子：累进税制

- 比如对于个人所得税，如果税前收入z在z^*的左右两边税率不同：

$$T(z) = \begin{cases} tz & z < z^* \\ tz + \Delta t(z - z^*) & z \geq z^* \end{cases}$$

  即当收入在z^*以下时，边际税率为t，当收入超过z^*时，边际税率为$t + \Delta t$
- 收入稍微超过z^*时，边际税率增加，激励不同，会导致一部分人（比如本来收入应该在$(z^*, z^* + \Delta z^*)$的人）选择赚取z^*即可
- 效用最大化选择如下图
  - 会导致z^*左侧出现bunching现象
  - 右侧密度仍然不等于0，是由于右侧激励低，本来部分应该在更右侧的向左移动了

Kinks


a Budget set diagram
Type n^* + Δn^*
(marginal buncher)
Type n^*
Consumption z – T(z)
Slope 1 – t – Δt
Convex
kink
Slope 1 – t
z^*
$z^* + \Delta z^*$
Earnings z
b Density distribution diagram
Density
Bunching
Prekink density
Bunching
mass
Postkink density
z^*
$z^* + \Delta z^*$
Earnings z

弹性

- Saez(2010)指出，对于税前收入为$z^* + \Delta z^*$的“边际人”（marginal buncher），其效用函数曲线应该相切于z^*后的折线
- 收入的补偿弹性：

$$e = \frac{\frac{\Delta z^*}{z^*}}{\frac{\Delta t}{1-t}}$$

其中：$\Delta t/(1-t)$是额外的税收百分比；$\Delta z^*/z^*$是收入增加百分比，“边际人”对于这两者无差异

Bunching的大小

- 如果假设税前收入有一个分布：$h(z)$
- 那么，选择z^*的人数：

$$B = \int_{z^*}^{z^*+\Delta z^*} h(z)\, dz \approx h(z^*)\, \Delta z^*$$

- 如果考虑e存在异质性，那么考虑z, e的联合分布函数：$h(z,e)$，那么：

$$B = \int_e \int_{z^*}^{z^*+\Delta z_e^*} h(z,e)\, dzde \approx \int_e h(z^*, e)\, \Delta z_e^* de = h(z^*)\, \mathbb{E}(\Delta z_e^*)$$

  其中$h(z^*) = \int_e h(z,e)\, de$。
- 只要计算出B和$h(z^*)$，就可以计算出Δz^*（$\mathbb{E}(\Delta z_e^*)$）

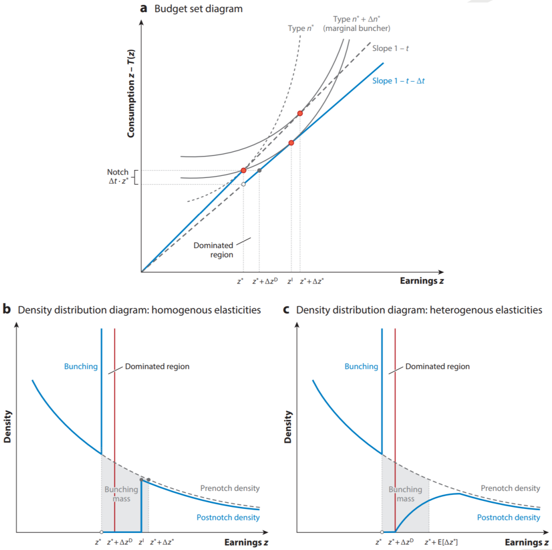
Norches

- norch与kink类似，区别在于：
  - kink在拐点处是连续的，norch在拐点处是离散的
    - norch造成了平均税率的不连续变化
  - norch可能会造成一部分被严格占优的区域
- 比如，以下这种非累进的、突然变化的税率：

$$T(z)=\begin{cases} tz & z<z^{*} \\ tz+\Delta tz & z\geq z^{*} \end{cases}$$

- 例子：Kleven和Waseem(2013)

Norches


a Budget set diagram
Consumption z – T(z)
Type n*
Type n* + Δn*
(marginal buncher)
Slope 1 – t
Slope 1 – t – Δt
Notch
Δt · z*
Dominated
region
z*
z* + Δz^D
z^I
z* + Δz*
Earnings z
b Density distribution diagram: homogenous elasticities
Density
Bunching
Dominated region
Bunching
mass
Prenotch density
Postnotch density
z*
z* + Δz^D
z^I
z* + Δz*
Earnings z
c Density distribution diagram: heterogenous elasticities
Density
Bunching
Dominated region
Bunching
mass
Prenotch density
Postnotch density
z*
z* + Δz^D
z* + E[Δz*]
Earnings z

Norches

- 以上区域中，$(z^*, z^* + \Delta z^D)$理论上应该是没有样本的——被占优的区域
- 然而，由于优化摩擦（optimization frictions）等的存在，实际数据中仍然可能会有少量样本
- 优化摩擦：经济个体没能达到最优的选择（未能达到kink或者norch的地方）
    - 调整成本（Chetty等人，2011）
    - 注意力成本
- 此外，行为经济学中的参照点（reference point）也可能会混淆bunching的估计
    - 比如退休年龄（Seibold, 2020）

Bunching的估计

- 在公式

$$B=\int_{z^*}^{z^*+\Delta z^*} h(z)\,dz \approx h(z^*)\,\Delta z^*$$

中，需要估计两个部分：
  - Bunching B
  - 反事实的密度函数$h(z^*)$
- 实际上，只要估计出$h(z)$，以上两个问题就都解决了
  - Bunching B无非就是实际数据频率高出密度函数的部分

估计方法

不失一般性，我们假设Bunching的点$z^* = 0$

1. 类似于直方图，将数据按照z的取值进行分组，假设组中值为$m_j, j = -J, ..., L, ..., 0, ...U, ...J$
   - 比如，按照1的组距进行分组：$\cdots(-4,-3],(-3,-2],(-2,-1],(-1,0],(0,1],(1,2],\cdots$对应的 组中值为$-3.5,-2.5,-1.5,-0.5,0.5,1.5$
2. 确定排除区域（excluded region）：$m_L < 0 < m_U$，即收到bunching影响的区域
3. 计算落入到每个组别的样本个数n_j
4. 使用如下多项式回归拟合密度函数：

$$n_j = \sum_{k=0}^{p} \beta_k m_j^k + \sum_{t=L}^{U} \gamma_t 1\{m_t = m_j\} + \epsilon_j$$

其中p为多项式阶数

估计方法

- 根据以上方法，γ_t就度量了反事实的密度函数，从而：

$$\hat{n}_j = \sum_{k=0}^{p} \hat{\beta}_k m_j^k$$

- 从而bunching：

$$\hat{B} = \sum_{t=L}^{0} \hat{\gamma}_t$$

- 而0右侧损失的密度为：

$$\hat{M} = \sum_{t=0}^{U} \hat{\gamma}_t$$

- 0处的密度函数：

$$\hat{h}(z^*) = \hat{h}(0) = \frac{\sum_{j=L}^{0} \hat{n}_j}{\frac{m_0 - m_L}{L}}$$

- 从而：

超参数和标准误

需要决定的超参数：

- 多项式阶数p
- 组距
- 排除区域：L和U
    - 固定一个L，通过迭代的方法确定U，使得$\left|\hat{B}-\hat{M}\right|$最小

标准误：使用bootstrap

例子：The interest rate elasticity of mortgage demand: evidence from bunching at the conforming loan limit