矩估计和广义矩估计

司继春

[1] 上海对外经贸大学

2023年12月

概览

矩估计

- 接下来我们介绍一些经典的点估计方法。
- 矩估计（method of moments）是使用历史最长的参数估计方法，其思路是使用样本矩代替总体矩对参数进行估计。
- 接下来我们将介绍经典的矩估计方法，并对此方法做进一步推广。

矩估计的思想

- 如果样本$x=(x_1,...,x_N)'$是来自于总体P_{θ_0}的独立同分布的样本
- 其一阶样本矩和一阶总体矩可以分别定义为

$$\begin{cases} m_1(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i \\ \mu_1(\theta)=\mathbb{E}_\theta(x_i) \end{cases}$$

其中$\mathbb{E}_\theta$表示给定一个参数θ，使用总体P_θ计算得到的理论的总体期望。

  - 由于真值为θ_0，因而真实的期望$\mathbb{E}(x_i)=\mathbb{E}_{\theta_0}(x_i)$。

矩估计的思想

- 我们知道，在一定比较宽松的条件下，根据大数定律有：

$$m_1(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}_{\theta_0}(x_i) = \mu_1(\theta_0)$$

- 如果$\mu_1(\cdot)$是一个连续且可逆的函数，那么真实参数θ_0可以写为：

$$\theta_0 = \mu_1^{-1}(\mu_1(\theta_0))$$

- 那么我们可以使用样本矩$m_1(x)$代替上式中的总体矩$\mu_1(\theta_0)$，由于$m_1(x) \xrightarrow{p} \mu_1(\theta_0)$，而$\mu_1^{-1}(\cdot)$为连续函数，从而估计量：

$$\hat{\theta} \triangleq \mu_1^{-1}(m_1(x)) \xrightarrow{p} \mu_1^{-1}(\mu_1(\theta_0)) = \theta_0$$

从而$\hat{\theta}$是θ_0的一致估计。

矩估计的思想

- 形象的理解是，给定任何一个θ，总体P_θ是一个确定的概率函数，因而可以计算在θ情况下的样本矩$\mathbb{E}_\theta\left(x_i\right)$。
- 理论上，样本矩$m_1\left(x\right)$和总体矩$\mu_1\left(\theta\right)$在样本量足够大的情况下应该是充分接近的
- 那么我们可以找到一个$\hat{\theta}$使得$\mu_1\left(\hat{\theta}\right)$与$m_1\left(x\right)$的差距最小，从而得到对真值$\theta_0$的估计。
- 以上就是矩估计的思想。

矩估计

泊松分布的矩估计

- 如果样本$x_i \sim P(\lambda_0)\ i.i.d$，我们知道样本矩$m_1(x) = \bar{x}$，比如，如果我们的样本观测值为$x = (3, 5, 7, 2, 3)$，那么样本矩为$m_1(x) = \bar{x} = \frac{3+5+7+2+3}{5} = 4$
- 假如任意给定一个λ，比如令$\lambda = 2$，总体的期望为$\mathbb{E}_\lambda(x_i) = \lambda = 2 \neq 4$，因而如果认为$\lambda_0 = 2$，那么总体$P(2)$所产生的总体矩与样本矩仍然有差异。
- 只有当$\lambda = 4$时，总体矩$\mathbb{E}_\lambda(x_i) = 4 = m_1(x)$，总体矩与我们观察到的样本矩相等，因而我们可以推断$\hat{\lambda} = 4$。

矩估计

泊松分布的矩估计

一般的，对于泊松分布总体，我们可以直接令总体矩等于样本矩得到估计，即：$\hat{\lambda} = m_1(x) = \bar{x}$下面我们分别讨论该估计量的无偏性和一致性。

- 首先，对于无偏性，由于：

$$\mathbb{E}\left(\hat{\lambda}\right) = \mathbb{E}\left(\bar{x}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left(x_i\right) = \lambda_0$$

  因而$\hat{\lambda}$是λ_0的无偏估计。
- 而对于一致性，根据大数定理：$\hat{\lambda} = \bar{x} \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left(x_i\right) = \lambda_0$因而$\hat{\lambda}$是$\lambda_0$的一致估计。

矩估计

泊松分布的矩估计

- 当然，一致性还可以通过分析$\hat{\lambda}$的偏差与方差来证明。
  - 根据以上讨论，该估计量的偏差为$\text{Bias}\left(\hat{\lambda}\right)=\mathbb{E}\left(\hat{\lambda}\right)-\lambda_0=0$，而其方差为：

$$\mathbb{V}\left(\hat{\lambda}\right)=\mathbb{V}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{V}\left(x_i\right)=\frac{\lambda_0}{N}$$

从而

$$\mathbb{E}\left(\hat{\lambda}-\lambda_0\right)^2=\mathbb{V}\left(\hat{\lambda}\right)+\left[\text{Bias}\left(\hat{\lambda}\right)\right]^2\to 0$$

从而$\hat{\lambda}\xrightarrow{L^2}\lambda_0$，从而$\hat{\lambda}\xrightarrow{p}\lambda_0$。

- 进一步，根据中心极限定理，有：

$$\sqrt{N}\left(\hat{\lambda}-\lambda_0\right)=\sqrt{N}\left(\bar{x}-\lambda_0\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,\lambda_0\right)$$

矩估计

对数正态分布的矩估计

- 如果样本$x_i \sim LN(\mu_0, 2)\ i.i.d$，即总体为对数正态分布，且一个参数$\sigma^2 = 2$已知。类似的，样本矩$m_1(x) = \bar{x}$，而总体矩$\mathbb{E}_\mu(x_i) = e^{\mu+1}$。
- 根据矩估计的思想，令总体矩等于样本矩，即：

$$e^{\hat{\mu}+1} = m_1(x) = \bar{x}$$

可以得到μ_0的矩估计值：$\hat{\mu} = \ln \bar{x} - 1$

矩估计

对数正态分布的矩估计

- 现在讨论该估计量的无偏性和一致性。首先根据Jensen不等式：

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}) = \mathbb{E}(\ln \bar{x}) - 1 \leq \ln(\mathbb{E}\bar{x}) - 1 = \ln e^{\mu_0+1} - 1 = \mu_0$$

因而$\hat{\mu}$并不是μ_0的无偏估计。

- 而根据大数定律，$\bar{x} \xrightarrow{p} \mathbb{E}x_i = e^{\mu_0+1}$，由于ln为连续函数，从而：

$$\hat{\mu} = \ln \bar{x} - 1 \xrightarrow{p} \ln e^{\mu_0+1} - 1 = \mu_0$$

因而$\hat{\mu}$是μ_0的一致估计。

矩估计

对数正态分布的矩估计

- 此外，我们还可以使用delta方法计算$\hat{\mu}$的极限分布。
- 根据中心极限定理：

$$\sqrt{N}\left(\bar{x}-e^{\mu_0+1}\right)\xrightarrow{D}N\left(0,\mathbb{V}\left(x_i\right)\right)$$

其中$\mathbb{V}\left(x_i\right)=e^{2(\mu_0+2)}-e^{2\mu_0+2}$。

- 因而，对估计量在e^{μ_0+1}处进行泰勒展开：

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\left(\hat{\mu}-\mu_0\right)&=\sqrt{N}\left(\ln\bar{x}-1-\ln e^{\mu_0+1}+1\right)\\&=\sqrt{N}\left(\ln\bar{x}-\ln e^{\mu_0+1}\right)\\&=\sqrt{N}\left(\ln e^{\mu_0+1}+\frac{1}{e^{\mu_0+1}}\left(\bar{x}-e^{\mu_0+1}\right)+O\left(\left(\bar{x}-e^{\mu_0+1}\right)^2\right)-\ln e^{\mu_0+1}\right)\\&=\sqrt{N}\frac{1}{e^{\mu_0+1}}\left(\bar{x}-e^{\mu_0+1}\right)+o_p\left(1\right)\xrightarrow{D}\frac{1}{e^{\mu_0+1}}\sqrt{N}\left(\bar{x}-e^{\mu_0+1}\right)\\&\overset{a}{\sim}N\left(0,e^{-2(\mu_0+1)}\mathbb{V}\left(x_i\right)\right)\end{aligned}$$

矩估计与区间估计

- 实际上，在以上两个例子中，我们不仅使用矩估计得到了未知参数的点估计，并使用大数定律验证了其一致性，还使用了中心极限定理和delta方法计算了矩估计量的大样本分布。
- 比如，直接使用中心极限定理可以得到，在泊松分布中:

$$\sqrt{N}\left(\hat{\lambda}-\lambda_0\right) \overset{a}{\sim} N\left(0,\lambda_0\right)$$

使用这一结论，我们可以方便的构建真值的区间估计。比如在上面的例子中，我们知道：

$$P\left(\left|\frac{\hat{\lambda}-\lambda_0}{\sqrt{\frac{\lambda_0}{N}}}\right| \leq 1.96\right) = 95\%$$

矩估计与区间估计

- 因而对以上不等式稍加改变，即得到：

$$P\left(\hat{\lambda}-1.96\times\sqrt{\frac{\lambda_0}{N}}\leq\lambda_0\leq\hat{\lambda}+1.96\times\sqrt{\frac{\lambda_0}{N}}\right)=95\%$$

因而λ_0的95%的置信区间应该为$\left(\hat{\lambda}-1.96\times\sqrt{\frac{\lambda_0}{N}},\hat{\lambda}+1.96\times\sqrt{\frac{\lambda_0}{N}}\right)$。

- 当然，上式中由于λ_0未知，不过由于$\hat{\lambda}\xrightarrow{p}\lambda_0$，因而我们可以使用$\hat{\lambda}$代替$\lambda_0$，最终得到$\lambda_0$的区间估计：

$$\left(\hat{\lambda}-1.96\times\text{s.e.}\left(\hat{\lambda}\right),\hat{\lambda}+1.96\times\text{s.e.}\left(\hat{\lambda}\right)\right)$$

其中$\text{s.e.}\left(\hat{\lambda}\right)=\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{N}}$。

多个参数的矩估计

如果我们有K个未知参数，即θ为K维向量，那么我们可以联立前K个样本矩和总体矩对θ进行估计，其中前K个样本矩和总体矩定义为：

$$\begin{cases} m_1(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^1 & \mu_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left(x_i^1\right) \\ m_2(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \mu_2(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left(x_i^2\right) \\ \vdots & \vdots \\ m_K(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^K & \mu_K(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left(x_i^K\right) \end{cases}$$

多个参数的矩估计

一般而言，如果我们有K个参数，$\theta = (\theta_1, ..., \theta_K)'$，那么我们使用前$K$个矩，解方程：

$$\begin{cases} m_1(x) = \mu_1\left(\hat{\theta}\right) \\ m_2(x) = \mu_2\left(\hat{\theta}\right) \\ \vdots \\ m_K(x) = \mu_K\left(\hat{\theta}\right) \end{cases}$$

如果该联立方程有解，即可得到参数θ_0的估计。

多个参数的矩估计

正态分布的矩估计

- 对于正态总体$x_i \sim N\left(\mu_0, \sigma_0^2\right)\ i.i.d$，其中未知总体参数$\theta = \left(\mu, \sigma^2\right)$，其一阶样本矩为$m_1(x) = \bar{x}$，二阶样本矩为$m_2(x) = \overline{x^2}$。
- 我们知道对于正态分布，$\mu_1(\theta) = \mu, \mu_2(\theta) = \mu^2 + \sigma^2$，从而矩估计为：

$$\begin{cases} m_1(x) = \bar{x} = \hat{\mu} \\ m_2(x) = \overline{x^2} = \hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{cases}$$

多个参数的矩估计

正态分布的矩估计

下面分析其无偏性和一致性。

- 根据之前的结论，$\mathbb{E}\hat{\mu} = \mu_0, \mathbb{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{N-1}{N}\sigma_0^2$，因而$\hat{\mu}$是无偏估计量而$\hat{\sigma}^2$并非无偏估计量。
- 而由于$\bar{x} \xrightarrow{p} \mu_0$，$\overline{x^2} \xrightarrow{p} \mu_0^2 + \sigma_0^2$，从而$\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \mu_0^2 + \sigma_0^2 - \mu_0^2 = \sigma_0^2$，因而$\hat{\mu}$和$\hat{\sigma}^2$都是一致估计量。

多个参数的矩估计

条件正态的矩估计

- 考虑如下模型：$y_i|v_i \sim N(\mu, v_i)$，其中条件方差$v_i \sim E(0, \beta)$，而v_i不可观测。
- 此时，我们可以推算矩，其中

$$\mathbb{E}(y_i) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(y_i|v_i)] = \mu$$

而方差为

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(y_i) &= \mathbb{E}[\mathbb{V}(y_i|v_i)] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(y_i|v_i)] \\ &= \mathbb{E}(v_i) + \mathbb{V}(\mu) \\ &= \beta\end{aligned}$$

从而$\mathbb{E}(y_i^2) = \beta + \mu^2$。

多个参数的矩估计

条件正态的矩估计

- 从而矩估计为

$$\begin{cases} \bar{x} = \hat{\mu} \\ \overline{x^2} = \hat{\beta} + \hat{\mu}^2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\beta} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{cases}$$

更加一般的矩估计

接下来，我们将讨论矩估计的一般形式。

- 对于一个统计模型，记w_i为可观测数据，真实参数$\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^K$
- 只要我们可以找到K个矩条件，使得θ_0为矩条件（**moment condition**）方程：

$$\mathbb{E}\left[g\left(w_i, \theta\right)\right] = \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} g_1\left(w_i, \theta\right) \\ \vdots \\ g_K\left(w_i, \theta\right) \end{bmatrix}\right) = 0$$

的唯一解，那么我们就可以解以上总体矩方程组的样本方程等价形式：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \hat{\theta}\right) = 0$$

解得$\hat{\theta}$

- 可以证明，在一些额外比较宽松的条件下，$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta_0$。

更加一般的矩估计

对数正态分布的矩估计

- 之前我们已经计算了对数正态分布的矩估计，我们使用了矩条件$\mathbb{E}_\mu x_i = e^{\mu+1}$进行估计
- 而实际上我们也可以使用x_i其他函数的期望进行估计
- 比如，我们可以令$g(x_i, \mu) = \ln x_i - \mu$，使用矩条件$\mathbb{E}\left(\ln x_i - \mu\right) = 0$，从而一个自然的估计为：$\hat{\mu} = \overline{\ln x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)$
- 可以验证以上估计是一个无偏、一致估计。

识别

- 注意我们要求θ_0为矩条件方程组的唯一解，即模型是可识别的（identifiable），这要求矩条件方程不仅有解，而且解唯一。
  - 如果矩条件方程有不止一组解，那么我们无法区分真实参数究竟是哪一组解，导致该统计问题无法准确回答。
- 识别（identification）问题是计量经济学的核心问题。

识别问题

Beta分布的识别问题

如果$x_i \sim Beta(\alpha, \beta)$，我们知道其前两阶矩的矩条件为：

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x_i) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \mathbb{E}(x_i^2) = \frac{\alpha\beta+\alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{cases}$$

因而其矩估计为：

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \bar{x} \\ \frac{\alpha\beta+\alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \overline{x^2} \end{cases}$$

识别问题

Beta分布的识别问题

- 然而在估计以上问题之前，我们必须首先证明识别问题，即真值(α_0, β_0)为矩条件的唯一解，或者不存在另外的(α_1, β_1)使得：

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0} \\ \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_1^2(\alpha_1+\beta_1+1)}{(\alpha_1+\beta_1)^2(\alpha_1+\beta_1+1)} = \frac{\alpha_0\beta_0+\alpha_0^2(\alpha_0+\beta_0+1)}{(\alpha_0+\beta_0)^2(\alpha_0+\beta_0+1)} \end{cases}$$

- 如果存在着这样的(α_1, β_1)，那么使用(α_1, β_1)和使用真值(α_0, β_0)所代表的总体有相同的一、二阶矩，因而我们无法判断哪一个是对的。

识别问题

Beta分布的识别问题

为了证明以上结论，用反证法，现在假设存在这样的(α_1, β_1)，根据第一个等式，那么必然有：$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \triangleq c_0$带入到第二个式子，有：

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_1^2(\alpha_1+\beta_1+1)}{(\alpha_1+\beta_1)^2(\alpha_1+\beta_1+1)} &= \frac{\beta_1 c_0\beta_1 + \beta_1^2 c_0^2(\beta_1 c_0+\beta_1+1)}{(\beta_1 c_0+\beta_1)^2(\beta_1 c_0+\beta_1+1)} \\
&= \frac{c_0\beta_1^2 + \beta_1^2 c_0^2(\beta_1 c_0+\beta_1+1)}{\beta_1^2(c_0+1)^2(\beta_1 c_0+\beta_1+1)} \\
&= \frac{c_0 + c_0^2(\beta_1 c_0+\beta_1+1)}{(c_0+1)^2(\beta_1 c_0+\beta_1+1)}
\end{aligned}$$

识别问题

Beta分布的识别问题

同理

$$\frac{\alpha_0\beta_0+\alpha_0^2\left(\alpha_0+\beta_0+1\right)}{\left(\alpha_0+\beta_0\right)^2\left(\alpha_0+\beta_0+1\right)}=\frac{c_0+c_0^2\left(\beta_0c_0+\beta_0+1\right)}{\left(c_0+1\right)^2\left(\beta_0c_0+\beta_0+1\right)}$$

如果存在这样的(α_1,β_1)，那么自然有

$$\frac{c_0+c_0^2\left(\beta_1c_0+\beta_1+1\right)}{\left(c_0+1\right)^2\left(\beta_1c_0+\beta_1+1\right)}=\frac{c_0+c_0^2\left(\beta_0c_0+\beta_0+1\right)}{\left(c_0+1\right)^2\left(\beta_0c_0+\beta_0+1\right)}$$

然而上式如果成立，则必然有$\beta_1=\beta_0$，从而$\alpha_1=c_0\beta_1=c_0\beta_0=\alpha_0$。因而，以上矩条件有且仅有唯一解，使用前两阶矩是完全可以识别(α_0,β_0)的。

识别问题

外汇业务人数的识别问题

- 如果$M|N \sim Bi(N,p)$，$N \sim P(\lambda)$，(p,λ)为未知参数。
- 现在，如果我们只观察到M，而N观察不到，如果我们试图使用M的前两阶矩估计p和λ，有：

$$\begin{cases} \mathbb{E}(M) & = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M|N)] = \mathbb{E}(Np) = \lambda p \\ \mathbb{E}(M^2) & = \mathbb{V}(M) + [\mathbb{E}(M)]^2 \\ & = \mathbb{V}[\mathbb{E}(M|N)] + \mathbb{E}[\mathbb{V}(M|N)] + \lambda^2 p^2 \\ & = \mathbb{V}(Np) + \mathbb{E}[Np(1-p)] + \lambda^2 p^2 \\ & = p^2\lambda + p(1-p)\lambda + \lambda^2 p^2 \\ & = \lambda p + \lambda^2 p^2 \end{cases}$$

识别问题

外汇业务人数的识别问题

- 联立以上方程得到了一个恒等式：$\mathbb{E}\left(M^2\right)=\mathbb{E}\left(M\right)+\left[\mathbb{E}\left(M\right)\right]^2$或者$\mathbb{V}\left(M\right)=\mathbb{E}\left(M\right)$，无法单独解出$\lambda$或者$p$。
- 实际上，在这种情况下，由于$\mathbb{V}\left(M\right)=\mathbb{E}\left(M\right)$，因而第二个方程是多余的，而如果只使用第一个方程，一个方程无法解除两个参数，即有无穷多组解。因而如果只使用前两阶矩估计p和λ，是无法识别的。

一元线性回归

在保证识别的前提下，很多统计学问题都可以使用矩估计进行参数估计。

一元线性回归

- 给定数据$w_i = (y_i, x_i)'$，我们希望估计条件期望：$\mathbb{E}(y_i|x_i)$。如果我们假定条件期望为线性函数形式，即

$$\mathbb{E}(y_i|x_i) = \alpha_0 + \beta_0 x_i$$

  那么只要估计得到α和β就得到了条件期望的估计。
- 注意在这里我们并没有对x_i和y_i的联合分布做任何假定，只是假设条件期望$\mathbb{E}(y_i|x_i)$为线性函数形式。

一元线性回归

一元线性回归

- 如果我们令$u_i = y_i - \mathbb{E}(y_i|x_i) = y_i - \alpha_0 - \beta_0 x_i$那么根据条件期望的性质，有：

$$\mathbb{E}(u_i|x_i) = \mathbb{E}(y_i - \alpha_0 - \beta_0 x_i|x_i) = \mathbb{E}(y_i|x_i) - (\alpha_0 + \beta_0 x_i) = 0$$

从而真值α_0, β_0满足：

$$\begin{cases} \mathbb{E}(y_i - \alpha_0 - \beta_0 x_i) = \mathbb{E}(u_i) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(u_i|x_i)] = 0 \\ \mathbb{E}[x_i(y_i - \alpha_0 - \beta_0 x_i)] = \mathbb{E}(x_i u_i) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(x_i u_i|x_i)] = \mathbb{E}[x_i \mathbb{E}(u_i|x_i)] = 0 \end{cases}$$

一元线性回归

一元线性回归

- 因而(α_0, β_0)是矩条件方程：

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(y_i - \alpha_0 - \beta_0 x_i\right) = 0 \\ \mathbb{E}\left[x_i\left(y_i - \alpha_0 - \beta_0 x_i\right)\right] = 0 \end{cases}$$

的解。

一元线性回归

一元线性回归

- 在使用以上矩条件之前还需要讨论识别问题，也就是虽然(α_0, β_0)是以上矩条件方程的解，但是我们还要求该解时唯一解。
- 使用上式解得

$$\begin{cases} \alpha_0 = \mathbb{E}(y_i) - \beta_0 \mathbb{E}(x_i) \\ \beta_0 = \frac{\mathbb{E}(x_i y_i) - \mathbb{E}(x_i)\mathbb{E}(y_i)}{\mathbb{E}(x_i^2) - [\mathbb{E}(x_i)]^2} = \frac{\mathbb{COV}(x_i, y_i)}{\mathbb{V}(x_i)} \end{cases}$$

  - 如果$\mathbb{V}(x_i) \neq 0$，即x_i不是常数，那么方程组有唯一解；
  - 如果$x_i = c$为一个常数，只要满足$\alpha - c\beta = \mathbb{E}(y_i)$的所有$(\alpha, \beta)$都是解，因而以上问题是不可识别的。

一元线性回归

一元线性回归

- 假设x_i不是常数，那么我们可以用样本的等价形式

$$\begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i\right)=0 \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\left(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i\right)\right]=0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} \hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x} \\ \hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} \end{cases}$$

使用大数定律可以得到，以上为一致估计量。

多元线性回归

多元线性回归

- 给定数据$w_i = (y_i, x_i')'$，其中$x_i \in \mathbb{R}^K$，即

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iK} \end{bmatrix}_{K\times 1}$$

- 如果令$x_{i1} = 1$，假设

$$\mathbb{E}(y_i|x_i) = x_i'\beta_0 = \beta_{10} + \beta_{20}x_{i2} + \cdots + \beta_{K0}x_{iK}$$

那么令$u_i = y_i - x_i'\beta_0$，有$\mathbb{E}(u_i|x_i) = 0$

多元线性回归

多元线性回归

- 从而

$$\mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} u_i \\ u_i x_{i2} \\ \vdots \\ u_i x_{iK} \end{bmatrix}\right) = \mathbb{E}\left(u_i x_i\right)$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(u_i x_i | x_i\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[x_i \mathbb{E}\left(u_i | x_i\right)\right] = 0$$

多元线性回归

多元线性回归

- 将$u_i = y_i - x_i'\beta_0$带入，有

$$\mathbb{E}\left[x_i\left(y_i - x_i'\beta_0\right)\right] = \mathbb{E}\left[x_i y_i\right] - \mathbb{E}\left[x_i x_i'\beta_0\right] = 0$$

如果假设$\mathbb{E}\left(x_i x_i'\right)$可逆，那么

$$\beta_0 = \left[\mathbb{E}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1}\left[\mathbb{E}\left(x_i y_i\right)\right]$$

多元线性回归

多元线性回归

- 在这里，我们的矩条件方程为：$\mathbb{E}\left[x_i y_i\right] - \mathbb{E}\left[x_i x_i' \beta_0\right] = 0$，使用样本矩代替总体矩，即

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[x_i y_i\right] - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[x_i x_i' \hat{\beta}\right] = 0$$

解以上方程可得

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i y_i\right)\right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i y_i\right)\right]\end{aligned}$$

多元线性回归

多元线性回归

- 如果令

$$X = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NK} \end{bmatrix}$$

以及：

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

多元线性回归

多元线性回归

- 那么

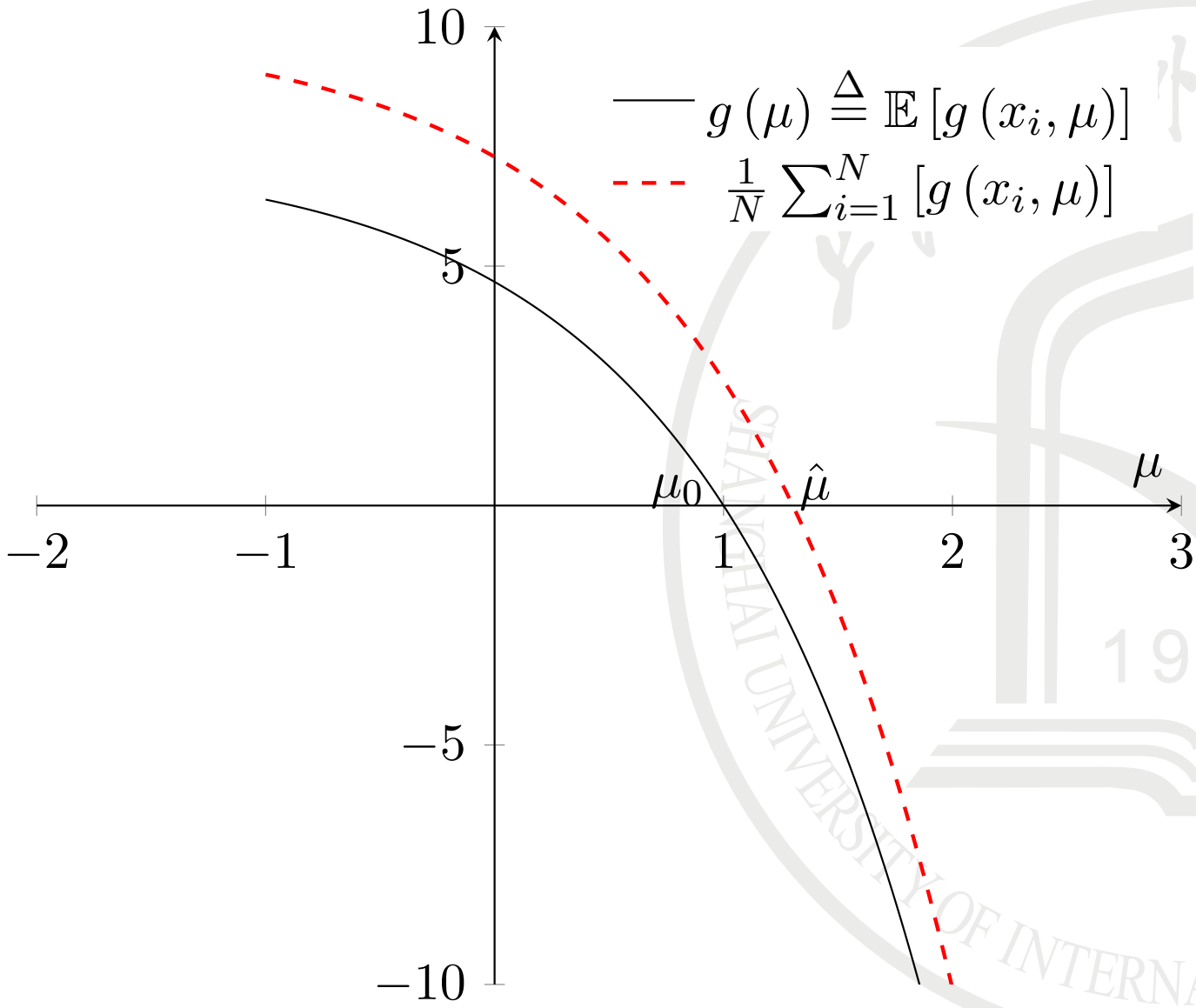
$$\begin{cases} X'X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_N' \end{bmatrix} = x_1x_1' + \cdots + x_Nx_N' = \sum_{i=1}^{N} (x_ix_i') \\ X'Y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N = \sum_{i=1}^{N} (x_iy_i) \end{cases}$$

- 从而估计量可以写为$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$。以上就是所谓的普通最小二乘（ordinary least squares, OLS）。

矩估计的一致性

- 得到统计量以后，我们经常还需要讨论统计量的无偏、一致、有效等的统计性质。
- 一般而言，矩估计并不能够完全保证估计量是无偏的，但是一致性在很很大程度上都是满足的。
- 为了说明这点，考虑如下图所示的总体矩与样本矩函数。
- 该图画出了对数正态例子中（令$\mu_0 = 1$）的：
  - 总体矩条件方程$\mathbb{E}\left[g\left(x_i, \mu\right)\right] = \mathbb{E}\left(x_i - e^{\mu+1}\right) = e^{\mu_0+1} - e^{\mu+1} \triangleq g\left(\mu\right)$
  - 样本矩条件方程：$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g\left(x_i, \mu\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - e^{\mu+1}\right)$
  - 注意以上我们将样本矩和总体矩都视为μ的函数（而非μ_0！）。

矩估计的一致性


10
5
−5
−10
−2
−1
1
2
3
μ
μ_0
$\hat{\mu}$
$g(\mu) \triangleq \mathbb{E}[g(x_i, \mu)]$
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[g(x_i, \mu)]$

矩估计的一致性

- 识别条件意味着总体矩条件方程$g(\mu)=0$的解必须为μ_0
- 而样本矩条件方程$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i,\mu)=0$的解即我们的估计量$\hat{\theta}$。
- 根据大数定律，自然有

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i,\mu) \xrightarrow{p} g(\mu)$$

- 可以想象，当样本量足够大时，图中样本矩和总体矩的曲线会无限接近，且由于$g(x_i,\mu)$对于μ而言是一个连续函数，那么自然$\hat{\mu}$也会收敛到μ_0。

矩估计的一致性

- 然而以上论证在某些特殊情况下也是不成立的。
- 比如，对于帕累托分布（$x_i \sim Pa(a,\beta)$，其中a为范围参数，β为形状参数，且$\beta > 0$），其密度函数为

$$f(x|a,\beta) = 1\{x > a\}\beta \cdot a^{\beta} x^{-(\beta+1)}$$

从而$\text{supp}(x) = (a, +\infty)$。

- 如果计算期望，有

$$\mathbb{E}(x_i) = \begin{cases} \frac{\beta a}{\beta - 1} & \beta > 1 \\ \infty & 0 < \beta \leq 1 \end{cases}$$

矩估计的一致性

- 不妨令$a=1$，那么估计β的总体矩条件为

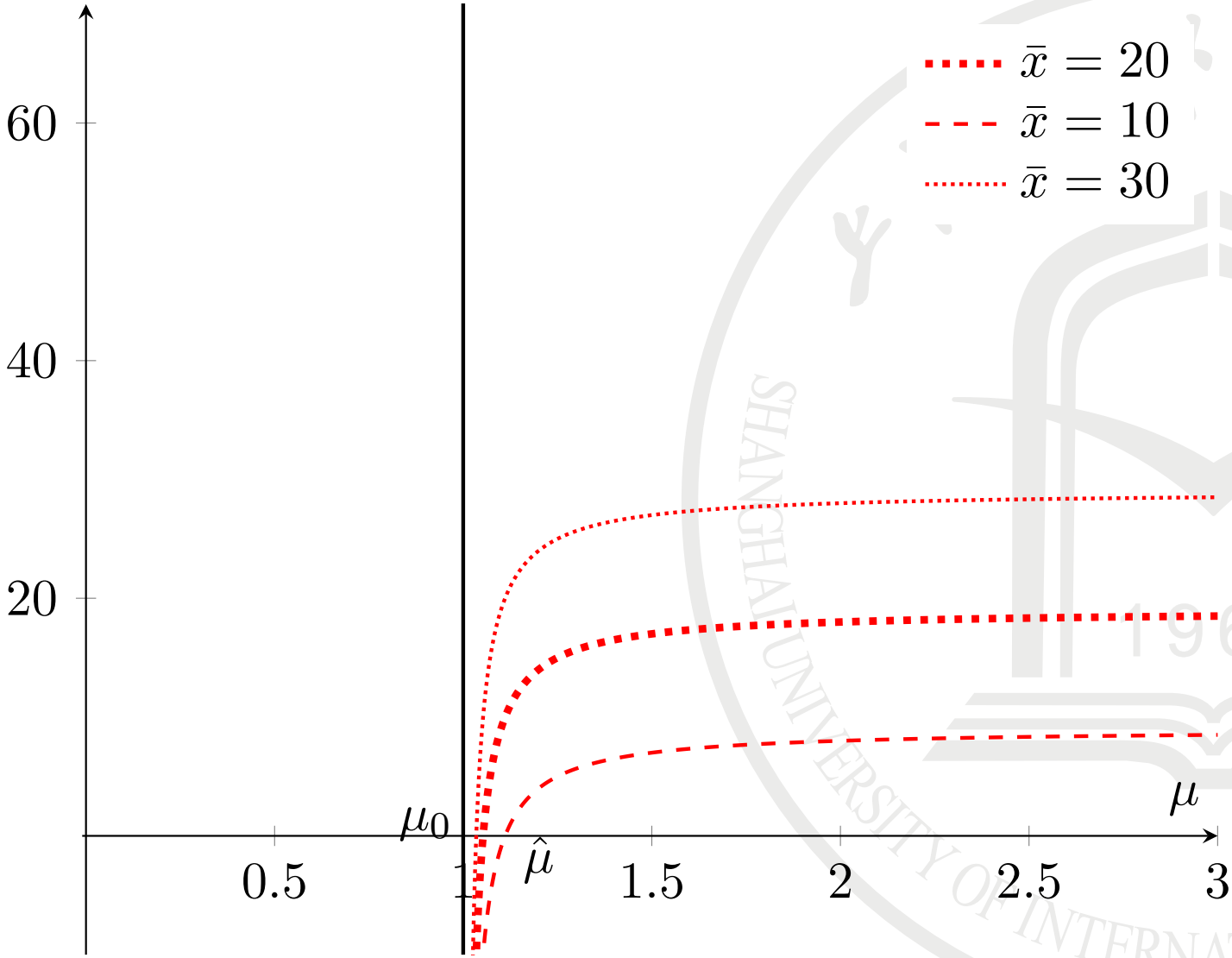
$$\mathbb{E}\left[g\left(x_i,\beta\right)\right]=\mathbb{E}\left(x_i-\frac{\beta}{\beta-1}\right)=\frac{\beta_0}{\beta_0-1}-\frac{\beta}{\beta-1}\triangleq g\left(\beta\right)$$

而样本矩条件为

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g\left(x_i,\mu\right)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\frac{\beta}{\beta-1}\right)$$

  - 下图展示了当$\beta_0=1$时的总体和样本矩函数，其中，由于当$\beta_0=1$时，$\mathbb{E}\left(x_i\right)=\infty$，从而总体矩函数退化成了一条$x=1$的竖直线条。
- 如果我们使用矩估计$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\frac{\beta}{\beta-1}\right)=0$从而$\hat{\beta}=\frac{\bar{x}}{\bar{x}-1}$。
  - 虽然$\mathbb{E}\left(x_i\right)=\infty$，但是无论样本量多大，样本均值$\bar{x}$不会是正无穷。
  - 注意到β的取值范围为$(0,\infty)$，然而对于$\beta_0<1$，估计值$\hat{\beta}>1$永远成立，从而我们无法得到一致估计。

矩估计的一致性



矩估计的一致性

- 为了防止出现以上的情况，我们不仅仅需要保证

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right) \xrightarrow{p} \mathbb{E}\left[g\left(x_i,\theta\right)\right] \triangleq g\left(\theta\right)$$

而且需要保证对于任意的θ，两者之间都要足够的接近，而不能像帕累托分布中一样出现

$$\begin{aligned} g\left(\beta\right) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g\left(x_i,\mu\right) &= \frac{\beta_0}{\beta_0-1} - \frac{\beta}{\beta-1} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \frac{\beta}{\beta-1}\right) \\ &= \frac{\beta_0}{\beta_0-1} - \bar{x} \end{aligned}$$

当$\beta_0 = 1$时$g\left(\beta_0\right) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g\left(x_i,\mu\right) = \infty$的情况。

矩估计的一致性

- 此时，我们需要比大数定律更强的一致大数定律（Uniform law of large numbers, ULLN），即要求对于任意的$\theta \in \Theta$，

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g\left(x_i, \theta\right) - g\left(\theta\right) \right| \xrightarrow{p} 0$$

- 这就要求样本矩函数$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \theta\right)$和总体矩函数$\mathbb{E}\left[g\left(x_i, \theta\right)\right]$作为$\theta$的函数，两者之间的收敛不应是针对某一个$\theta$的，而是针对所有的$\theta \in \Theta$，$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \theta\right)$和$\mathbb{E}\left[g\left(x_i, \theta\right)\right]$之间的距离的上界也要收敛到0。

矩估计的一致性

- 一致大数定律可以通过以下几个条件得到：
  - Θ为紧集
  - 对于所有的x，$g(x,\theta)$对θ都是连续的
  - 存在一个不依赖于θ的函数$K(x)$满足$\mathbb{E}[K(x)]<\infty$，使得对于所有的x和θ，有：$|g(x,\theta)|\leq K(x)$

矩估计的一致性

矩估计的一致性

如果$w_i \in \mathbb{R}^p$为一系列独立同分布的随机向量，$g(w,\theta) \in \mathbb{R}^K$为Borel可测函数，假设：

1. $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^K$，其中$\Theta$为紧集；
2. （连续性条件）对于任意的w，$g(w,\theta)$在Θ上对θ为连续函数；
3. （收敛性条件）存在一个函数$K(w)$，使得对于任意的$\theta \in \Theta$，$|g(w,\theta)| \leq K(w)$，其中$\mathbb{E}[K(w)] < \infty$；
4. （识别条件）θ_0为方程：$\mathbb{E}[g(w_i,\theta)] = 0$的唯一解

那么方程：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\hat{\theta}\right) = 0$$

的解$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta_0$。

矩估计的一致性

对数正态的矩估计的一致性

在对数正态的例子中，矩条件为：$\mathbb{E}\left(x_i - e^{\mu+1}\right) = 0$，因而$g(x,\mu) = x - e^{\mu+1}$，可以检查：

1. 取$\Theta = [-C, C]$，为一个紧集，其中C为一个（可以足够大的）正常数；
2. 对μ为连续（且单调）的函数；
3. 取$K(x) = x + e^{C+1}$，可知在Θ内，有

$$|g(x,\mu)| = \left|x - e^{\mu+1}\right| \leq x + e^{\mu+1} \leq K(x)$$

而$\mathbb{E}[K(x)] = e^{\mu_0+1} + e^{C+1} < \infty$；
4. 当$\mathbb{E}[g(x_i,\mu)] = 0$时，具有唯一解$\mu = \mu_0$。

因而满足以上定理的条件，从而矩估计量$\hat{\mu} \xrightarrow{p} \mu_0$。

矩估计的渐进正态性

- 在得到未知参数θ的估计量$\hat{\theta}$之后，我们经常还需要知道估计量$\hat{\theta}$的抽样分布，比如其大样本分布，才能够在此基础之上完成区间估计、假设检验等任务。
- 估计量的精确分布一般是非常难以计算的，因而我们经常诉诸于估计量的大样本分布进行近似。

矩估计的渐进正态性

- 首先考虑一维情形。我们假设$\theta \in \mathbb{R}$，那么在矩条件：$\mathbb{E}\left[g\left(w_i, \theta_0\right)\right] = 0$成立的条件下，矩估计量即解如下方程：$\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i, \hat{\theta}\right)\right] = 0$
- 如果我们假设函数$g\left(\cdot,\cdot\right)$对$\hat{\theta}$是连续可微的，那么我们可以对其在$\theta_0$处进行泰勒展开：

$$0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i, \theta_0\right)\right] + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{dg\left(w_i, \theta_0\right)}{d\theta}\left(\hat{\theta} - \theta_0\right) + O\left(\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)^2\right)$$

两边乘以$\sqrt{N}$，得到

$$\begin{aligned} -\sqrt{N}\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i, \theta_0\right)\right]}{N} &= \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{dg\left(w_i, \theta_0\right)}{d\theta}}{N}\right]\left[\sqrt{N}\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)\right] + O\left(\sqrt{N}\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)^2\right) \\ &= \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{dg\left(w_i, \theta_0\right)}{d\theta}}{N}\right]\left[\sqrt{N}\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)\right] + o_p\left(1\right) \end{aligned}$$

矩估计的渐进正态性

- 等式左边，根据中心极限定理，由于$\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]=0$，因而有

$$\sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]\overset{a}{\sim}N\left(0,\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]\right)$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]&=\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)^2\right]-\left[\mathbb{E}\left(g\left(w_i,\theta_0\right)\right)\right]^2\\&=\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)^2\right]\triangleq B\end{aligned}$$

- 等式右边，根据大数定律，有

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{dg\left(w_i,\theta_0\right)}{d\theta}\xrightarrow{p}\mathbb{E}\left[\frac{dg\left(w_i,\theta_0\right)}{d\theta}\right]\triangleq A$$

矩估计的渐进正态性

- 根据以上结论，原式可以写为：

$$A \cdot \sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)+o_p(1) \overset{a}{\sim} N(0, B)$$

从而：

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{B}{A^2}\right)$$

- 注意到A和B都依赖于未知参数θ_0，因而如果需要计算$\hat{\theta}$的渐近方差，可以将$\hat{\theta}$带入到A和B的表达式中进行计算
  - 由于$\hat{\theta}$是θ_0的一致估计量，所以大样本条件下对渐近方差的估计仍然是准确的。

矩估计的渐进正态性

对数正态的矩估计的一致性

在对数正态的例子中，矩条件为：

$$\mathbb{E}\left[g\left(x_i,\mu\right)\right]=\mathbb{E}\left(x_i-e^{\mu+1}\right)=0$$

从而其中：

$$\begin{cases} A & =\mathbb{E}\left[\frac{dg(x_i,\mu_0)}{d\mu}\right]=-e^{\mu_0+1} \\ B & =\mathbb{E}\left[g\left(x_i,\mu_0\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\left(x_i-e^{\mu_0+1}\right)^2\right] \\ & =\mathbb{V}\left(x_i\right)=e^{2(\mu_0+2)}-e^{2\mu_0+2} \end{cases}$$

因而 $\frac{B}{A^2}=\frac{\mathbb{V}(x_i)}{e^{2\mu_0+2}}$。根据以上结论，有：

$$\sqrt{N}\left(\hat{\mu}-\mu_0\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,\frac{\mathbb{V}\left(x_i\right)}{e^{2\mu_0+2}}\right)$$

矩估计的渐进正态性

- 对于多元的情形，同样可以使用delta方法。
- 如果我们的总体矩条件方程为：

$$\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta\right)\right]=\mathbb{E}\left(\left[\begin{array}{c} g_1\left(w_i,\theta\right) \\ \vdots \\ g_K\left(w_i,\theta\right) \end{array}\right]\right)=0$$

真值θ_0为以上方程的解，那么估计值$\hat{\theta}$使得其样本矩条件方程

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]=0$$

矩估计的渐进正态性

对以上方程在θ_0处进行泰勒展开，即对于$g\left(w_i,\hat{\theta}\right)$的$K$个分量都进行泰勒展开，有

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial g\left(w_i,\theta_0\right)}{\partial\theta'}\right]\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)+O\left(\left\|\hat{\theta}-\theta_0\right\|^2\right)\end{aligned}\tag{1}$$

其中：

$$\frac{\partial g\left(w_i,\theta_0\right)}{\partial\theta'}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\theta_1}g_1\left(w_i,\theta_0\right)&\cdots&\frac{\partial}{\partial\theta_K}g_1\left(w_i,\theta_0\right)\\\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial}{\partial\theta_1}g_K\left(w_i,\theta_0\right)&\cdots&\frac{\partial}{\partial\theta_K}g_K\left(w_i,\theta_0\right)\end{bmatrix}_{K\times K}$$

矩估计的渐进正态性

根据大数定律，令

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial\theta'}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]\xrightarrow{p}\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta'}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]\triangleq\mathcal{G}_0$$

由于$\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]=0$，而协方差矩阵：

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]&=\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]-\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]\\&=\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]\end{aligned}$$

因而根据中心极限定理：

$$\sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]\overset{a}{\sim}N\left(0,\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]\right)$$

矩估计的渐进正态性

因而方程(1)可以写为

$$\mathcal{G}_0\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)+o_p\left(1\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]\right)$$

最后得到结论：

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,\mathcal{G}_0^{-1}\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]\left(\mathcal{G}_0^{-1}\right)'\right)$$

矩估计的渐进正态性

OLS估计量的渐进分布

在OLS中，$g(w_i, \beta) = x_i u_i = x_i (y_i - x_i'\beta)$，因而

$$\mathcal{G}_0 = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \beta'} g(w_i, \beta)\right] = -\mathbb{E}\left(x_i x_i'\right)$$

以及：

$$\mathbb{E}\left[g(w_i, \theta_0)\, g(w_i, \theta_0)'\right] = \mathbb{E}\left[x_i u_i u_i' x_i'\right] = \mathbb{E}\left[u_i^2 x_i x_i'\right]$$

从而

$$\sqrt{N}\left(\hat{\beta} - \beta_0\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \left[\mathbb{E}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1} \mathbb{E}\left[u_i^2 x_i x_i'\right] \left[\mathbb{E}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1}\right)$$

矩估计的渐进正态性

OLS估计量的渐进分布

为了估计渐进方差，可以直接计算$\hat{u}_i = y_i - x_i'\hat{\beta}$，然后将所有的期望用平均进行估计，得到渐进方差的估计

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\hat{\beta}\right) &= \frac{\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{u}_i^2 x_i x_i'\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1}}{N} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{u}_i^2 x_i x_i'\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1} \\
&= \left(X'X\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{u}_i^2 x_i x_i'\right)\left(X'X\right)^{-1}
\end{aligned}$$

即怀特异方差文件标准误（White，1980）。

矩估计的渐进正态性

OLS估计量的渐进分布（同方差）

如果假设同方差，即$\mathbb{E}\left(u_i^2|x_i\right)=\sigma^2$，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]&=\mathbb{E}\left[u_i^2x_ix_i'\right]\\&=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[u_i^2x_ix_i'|x_i\right]\right)\\&=\sigma^2\mathbb{E}\left(x_ix_i'\right)\end{aligned}$$

因而根据以上结论，有

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0^{-1}\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]\left(\mathcal{G}_0^{-1}\right)'&=\left[-\mathbb{E}\left(x_ix_i'\right)\right]^{-1}\sigma^2\mathbb{E}\left(x_ix_i'\right)\left[-\mathbb{E}\left(x_ix_i'\right)\right]^{-1}\\&=\sigma^2\left[\mathbb{E}\left(x_ix_i'\right)\right]^{-1}\end{aligned}$$

矩估计的渐进正态性

OLS估计量的渐进分布（同方差）

最终我们可以得到

$$\sqrt{N}\left(\hat{\beta}-\beta_0\right) \overset{a}{\sim} N\left(0, \sigma^2\left[\mathbb{E}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1}\right)$$

从而OLS估计量的渐进方差为

$$\mathbb{V}\left(\hat{\beta}\right)=\frac{\sigma^2\left[\mathbb{E}\left(x_i x_i'\right)\right]^{-1}}{N}$$

将σ^2的估计：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{u}_i^2$$

带入即可得到渐近方差的估计。

矩估计

- 以上介绍了矩估计，即使用总体矩条件式

$$\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]=\mathbb{E}\left(\left[\begin{array}{c} g_1\left(w_i,\theta_0\right) \\ \vdots \\ g_K\left(w_i,\theta_0\right) \end{array}\right]\right)=0$$

的样本对应式

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)=\left[\begin{array}{c} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g_1\left(w_i,\hat{\theta}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g_K\left(w_i,\hat{\theta}\right) \end{array}\right]=0$$

解方程得到估计

- 当然前提是可识别性，即总体矩条件式有且仅有唯一解。

矩条件个数

- 一般而言，当我们有K个未知参数时，需要K个方程的联立得到唯一的一组解
- 如果方程的个数$G < K$，可能会碰到无穷多组解的情况，此时是无法识别的；
- 而如果方程的个数$G > K$，则可能会遇到无解的情况。
- 然而，从总体的角度而言，很多时候我们的确可以找到更多的（$G > K$个）矩条件，而总体的未知参数能够使得这G个矩条件都成立。

矩条件个数

泊松分布的矩条件

- 考虑$x_i \sim P(\lambda)$ $i.i.d$，那么根据泊松分布的形式，有

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x_i - \lambda) = 0 \\ \mathbb{E}\left(x_i^2 - \lambda - \lambda^2\right) = 0 \end{cases}$$

- 根据第一个方程，$\lambda = \mathbb{E}(x_i)$，将其带入到第二个方程，得到

$$\mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mathbb{E}(x_i) + [\mathbb{E}(x_i)]^2$$

  根据泊松分布的性质，$\mathbb{V}(x_i) = \mathbb{E}(x_i)$，从而上式无非就是$\mathbb{E}\left(x_i^2\right) = \mathbb{V}(x_i) + [\mathbb{E}(x_i)]^2$，即方差的定义，该方程必定成立。
- 所以以上虽然有两个矩条件，但是是有唯一解$\lambda = \mathbb{E}(x_i) = \mathbb{V}(x_i)$的。

矩条件个数

- 如果我们使用了$G > K$个方程还能够保证识别性，即有唯一解，那么我们能不能从样本的角度综合使用G个方程一起估计$K < G$个参数呢？
- 由于额外的矩条件可能带来更多的信息，从而使用更多的矩条件有可能可以改善估计量的有效性，但是一旦矩条件个数多于未知参数个数，是不能保证样本的矩条件一定有解的。

矩条件个数

泊松分布的样本矩条件

- 考虑上例，其样本矩为：

$$\begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\lambda)=0 \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2-\lambda-\lambda^2\right)=0 \end{cases}$$

根据第一个方程$\hat{\lambda}=\bar{x}$，将其带入到第二个方程，得到$\overline{x^2}=\bar{x}+\bar{x}^2$，然而这一关系在样本中很难满足，从而以上方程组也很难有解。

矩估计的其他形式

- 注意以上例子中，总体矩条件是有解的，仅仅是由于样本的抽样误差而导致样本矩条件没有解，那么有没有可能在样本中也充分使用所有矩条件得到估计呢？
- 考虑总体矩条件的样本对应式:

$$\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \hat{\theta}\right) = \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} g_1\left(w_i, \hat{\theta}\right) \\ \vdots \\ g_K\left(w_i, \hat{\theta}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} g_1\left(w_i, \hat{\theta}\right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} g_K\left(w_i, \hat{\theta}\right) \end{bmatrix} = 0$$

由于乘以$\frac{1}{N}$不改变方程的解，方便起见我们将其省略。

矩估计的其他形式

- 此时，我们有K个方程、K个未知参数，解以上的方程实际上等价于最小化每个方程的平方和，即

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \sum_{k=1}^{K} \left[\sum_{i=1}^{N} g_k \left(w_i, \theta \right) \right]^2$$

  - 如果方程组有唯一解，即存在唯一的$\hat{\theta}$使得$\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \hat{\theta}\right) = 0$，那么$\hat{\theta}$也会使得$\sum_{k=1}^{K} \left[\sum_{i=1}^{N} g_k \left(w_i, \hat{\theta} \right) \right]^2$达到最小值0；
  - 其他的θ'都会使得$\sum_{k=1}^{K} \left[\sum_{i=1}^{N} g_k \left(w_i, \theta' \right) \right]^2 > 0$
  - 从而$\hat{\theta}$是以上最优化问题的唯一解，且恰好使目标函数等于0。
  - 从而，解以上的最优化问题与解样本矩的方程组是完全等价的。

矩估计的其他形式

- 比如，在正态分布的矩估计中，其样本矩条件为

$$\begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)=0 \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2-\mu^2-\sigma^2\right)=0 \end{cases}$$

如果使用最优化的方法，即最小化

$$\min_{\mu,\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2-\mu^2-\sigma^2\right)\right]^2$$

可以验证，$\hat{\mu}=\bar{x},\hat{\sigma}^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2$刚好使得以上目标函数等于0，即最小化了以上的目标函数。

矩估计的Stata实现

Beta分布的矩估计

- 对于例Beta分布的矩估计问题，两个矩条件：

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(x_i - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = 0 \\ \mathbb{E}\left(x_i^2 - \frac{\alpha\beta+\alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\right) = 0 \end{cases}$$

- 代码：

```
clear
set obs 100
gen x=rbeta(1.2,0.5)
gen x2=x^2
gmm (x-({alpha=1}/({alpha}+{beta=1}))) (x2-({
    alpha}*{beta}+{alpha}^2*({alpha}+{beta}+1))
    /(({alpha}+{beta})^2*({alpha}+{beta}+1))),
    winit(identity)
```

矩估计的Stata实现

Beta分布的矩估计

- 其中gmm命令即为（广义）矩估计命令
- winit(identity)即将两个样本矩条件的平方和相加，稍后介绍这个选项的含义；
- 第一次使用“{alpha}”、“{beta}”时大括号中的“=1”的作用是设置一个初始值。我们可以使用模拟的方法验证以上矩估（MM_beta.do）

广义矩估计

- 将以上想法进行推广，如果矩条件个数$G > K$，$\theta \in \mathbb{R}^K$，总体矩条件为

$$\mathbb{E}\left[g\left(w_i, \theta_0\right)\right] = \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} g_1\left(w_i, \theta_0\right) \\ \vdots \\ g_G\left(w_i, \theta_0\right) \end{bmatrix}\right) = 0$$

- 样本矩条件

$$\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \hat{\theta}\right) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} g_1\left(w_i, \hat{\theta}\right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} g_G\left(w_i, \hat{\theta}\right) \end{bmatrix} = 0$$

可能没有解

广义矩估计

- 但是我们可以最小化目标函数

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \sum_{g=1}^{G} \left[\sum_{i=1}^{N} g_g\left(w_i, \theta\right) \right]^2$$

- 此时，$\hat{\theta}$并不能保证每个$\sum_{i=1}^{N} g_g\left(w_i, \theta\right)$都等于0，但是每个样本矩都会足够贴近于0，即$\sum_{i=1}^{N} g_g\left(w_i, \theta\right) \approx 0$，而与0的误差可能仅仅因为抽样误差所致，此时$\hat{\theta}$也是一个足够好的估计。

广义矩估计

- 此外，注意到

$$\sum_{g=1}^{G}\left[\sum_{i=1}^{N} g_g\left(w_i,\theta\right)\right]^2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} g_1\left(w_i,\theta\right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} g_G\left(w_i,\theta\right) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} g_1\left(w_i,\theta\right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} g_G\left(w_i,\theta\right) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]' \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]$$

从而以上的目标函数也可以写为

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]' \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]$$

广义矩估计的Stata实现

Poisson分布的矩估计

- 在泊松分布的例子中，如果使用两个矩条件，该估计可以通过最小化

$$\min_{\lambda} \left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\lambda)\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2-\lambda-\lambda^2\right)\right]^2$$

得到。使用gmm命令对其进行估计：

```
gen `x2'=`varlist'^2
gmm (`varlist'-{lambda=`lambda'}) (`x2'-({
    lambda}+{lambda}^2)), winit(identity)
    onestep
```

- 同样使用winit(identity)实现了两个样本矩条件求和再最小化，而onestep为一步估计，接下来会详细解释

广义矩估计

- 在上例中，winit(identity)中的identity实际上代指单位阵，即在目标函数中乘以一个单位阵

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left[\sum_{i=1}^{N} g(w_i, \theta)\right]' \boldsymbol{I} \left[\sum_{i=1}^{N} g(w_i, \theta)\right]$$

  其中I为$G \times G$维的单位阵，其结果并不改变。
- 上式只是将两个矩条件的平方简单的加起来，一个很自然的想法是，两个矩条件所带有的信息可能是不同的，甚至是相关的，那么是否可以将其做一个加权平均呢？

广义矩估计

- 现在，如果我们找到一个$G \times G$的（对称的）正定矩阵$\mathcal{W}$，代替单位阵，即最小化

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left[\sum_{i=1}^{N} g(w_i, \theta) \right]' \mathcal{W} \left[\sum_{i=1}^{N} g(w_i, \theta) \right]$$

  - 那么如果$G = K$，我们仍然可以保证矩估计$\hat{\theta}$是以上最优化问题的唯一解
  - 而当$G > K$时，以上目标函数对不同的矩条件进行了“加权”，直觉上我们可以给信息量更大的矩条件以更大的权重，这可能可以提高估计的精度
- 从而，矩阵$\mathcal{W}$也被称为**权重矩阵（weighting matrix）**
- 而最小化以上目标函数得到的估计量称为**广义矩估计（generalized method of moments, GMM）**。
  - 根据以上论述，矩估计是当矩条件个数与未知参数维数相等（$G = K$）时的特例。

最优权重矩阵

- 可以想象，当我们使用不同的权重矩阵时，得到的GMM估计量$\hat{\theta}^{\mathcal{W}}$也是不相等的，且其精度（方差、标准误）也会有区别
- 此时就会存在一个特殊的权重矩阵$\mathcal{W}^*$，使用该矩阵得到的GMM估计量$\hat{\theta}^{\mathcal{W}^*}$所能达到的标准误最小，即对于所有的正定矩阵$\mathcal{W}$，有

$$\mathbb{V}\left(\hat{\theta}^{\mathcal{W}^*}\right) \preceq \mathbb{V}\left(\hat{\theta}^{\mathcal{W}}\right)$$

从而我们称$\mathcal{W}^*$为**最优权重矩阵**（optimal weighting matrix）或者**有效权重矩阵**（efficient weighting matrix）

- 在下一节中我们将证明，最优权重矩阵应该为：

$$\mathcal{W}^* = \left(\mathbb{E}\left[g\left(w_i, \theta_0\right) g\left(w_i, \theta_0\right)'\right]\right)^{-1}$$

最优权重矩阵

- 注意该矩阵是一个有关真值θ_0的函数，从而该矩阵并不可观测，为此我们需要对该矩阵进行估计：

$$\hat{\mathcal{W}}^* = \left(\mathbb{E}\left[g\left(w_i, \hat{\theta}\right) g\left(w_i, \hat{\theta}\right)' \right] \right)^{-1}$$

- 需要注意的是，我们不能最小化以下目标函数估计θ:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \theta\right) \right]' \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[g\left(w_i, \theta\right) g\left(w_i, \theta\right)' \right] \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \theta\right) \right]$$

即权重矩阵$\mathcal{W}$应为事先给定的，而不能作为最优化的一部分。

最优权重矩阵

- 为了解决最优权重矩阵的估计问题，我们可以使用两步法（twostep）：
  1. 给一个初始的正定矩阵$\hat{\mathcal{W}}_0$，比如$\hat{\mathcal{W}}_0 = I$即单位阵，最小化目标函数，得到一个初始估计$\hat{\theta}^{(1)}$；
  2. 使用$\hat{\theta}^{(1)}$计算最优权重矩阵

$$\hat{\mathcal{W}}_1 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[g\left(w_i, \hat{\theta}^{(1)}\right) g\left(w_i, \hat{\theta}^{(1)}\right)' \right] \right)^{-1}$$

并最小化

$$\hat{\theta}^{(2)} = \arg\min_{\theta} \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \theta\right) \right]' \hat{\mathcal{W}}_1 \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \theta\right) \right]$$

- 由于给定任意的正定矩阵，GMM估计都是一致估计，从而以上第2步实际是事先估计了最优权重矩阵，再进行“两步估计”。
  - 当然，对于$G = K$的情况，第二步是可以忽略的，因为给定任意的正定矩阵都可以使目标函数达到最小值0。

广义矩估计的Stata实现

Poisson分布的矩估计

- 在泊松分布的例子中，如果将onestep去掉：

```
clear
set obs 100
set seed 8889
gen x=rpoisson(10)
gen x2=x^2
gmm (x-{lambda=1}) (x2-({lambda}+{lambda}^2)),
    winit(identity)
```

或者加入twostep选项（twostep为gmm的默认选项），就可以进行以上的两步估计了，其中winit(identity)选项设定了第一步的权重矩阵使用了单位阵。

最优权重矩阵

- 当然，以上步骤还可以继续，即给定$\hat{\theta}^{(s)}$计算最优权重矩阵

$$\hat{\mathcal{W}}_s = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[g\left(w_i, \hat{\theta}^{(s)}\right) g\left(w_i, \hat{\theta}^{(s)}\right)' \right] \right)^{-1}$$

  再将其带入到目标函数中最优化，得到$\hat{\theta}^{(s+1)}$
- 取一个足够小的数字$\epsilon > 0$，直到$\left| \hat{\theta}^{(s)} - \hat{\theta}^{(s+1)} \right| < \epsilon$时才停止迭代。这种方法被称为迭代GMM（iterative GMM）。

广义矩估计的Stata实现

Poisson分布的矩估计

- 在泊松分布的例子中，迭代GMM可以使用igmm选项：

```
gmm (x-{lambda=1}) (x2-({lambda}+{lambda}^2)),
    winit(identity) igmm igmmeps(1e-4)
```

其中igmmeps(1e-4)即设定$\epsilon = 10^{-4}$。

广义矩估计的Stata实现

ET Tobit

- 考虑如下模型：

$$\ln(a + y_i) = \alpha + \beta x_i + u_i$$

其中a为未知参数，且$\mathbb{E}(u_i|x_i) = 0$。

- 如果a可以观测，那么我们可以计算出左手边的变量，然后使用OLS方法就可以估计α, β了
- 但是，a是不可观测的，这意味着我们无法计算出左手边的变量。

ET Tobit

- 为了估计未知参数，注意到

$$\mathbb{E}\left(u_i|x_i\right)=0\Rightarrow\mathbb{E}\left[g\left(x_i\right)\cdot u_i\right]=0$$

其中$g\left(x_i\right)$为x_i的任意函数

- 从而我们可以选取很多的x_i的函数，比如$1,x_i,x_i^2,x_i^3,e^{x_i},\sin\left(x_i\right),...$，并使用矩条件：

$$\begin{cases}\mathbb{E}\left(1\cdot u_i\right) & =\mathbb{E}\left\{1\cdot\left[\ln\left(a+y_i\right)-\alpha+\beta x_i\right]\right\}=0\\ \mathbb{E}\left(x_i\cdot u_i\right) & =\mathbb{E}\left\{x_i\cdot\left[\ln\left(a+y_i\right)-\alpha+\beta x_i\right]\right\}=0\\ \mathbb{E}\left(x_i^2\cdot u_i\right) & =\mathbb{E}\left\{x_i^2\cdot\left[\ln\left(a+y_i\right)-\alpha+\beta x_i\right]\right\}=0\\ & \vdots\end{cases}$$

注意到以上矩条件存在唯一解，从而可识别性条件满足，从而可以使用广义矩估计对其进行估计。

广义矩估计的Stata实现

ET Tobit

- 如下代码产生了如此数据生成过程的数据：

```
set obs 500
set seed 8997
gen x=rnormal(3,2)
local a=10
local alpha=5
local beta=3
local sigma=2
gen y = exp(`alpha'+`beta'*x+rnormal()*sqrt(`sigma'))-`a'
```

广义矩估计的Stata实现

ET Tobit

- 如下代码使用GMM对其进行了估计：

```
// 生成工具
gen x2=x^2
gen x3=x^3
gen x_e=exp(x)
gen x_sin=sin(x)
// 计算的初始值a
su y
local a_init=-1*r(min)+5
// 估计GMM
gmm (log({a=`a_init'}+y)-{alpha=0}-{beta=0}*x)
    ((log({a}+y)-{alpha}-{beta}*x)*x) ((log({a}+
    y)-{alpha}-{beta}*x)*x2) ((log({a}+y)-{alpha
    }-{beta}*x)*x3) ((log({a}+y)-{alpha}-{beta}*
    x)*x_e) ((log({a}+y)-{alpha}-{beta}*x)*x_sin
    ), winit(identity)
```

广义矩估计的Stata实现

ET Tobit

- 注意到我们在对参数a设定初始值时，使用了$a_{init} = -1 \times \min\{y\} + 5$，其目的是为了在初始值时就让$\ln(a + y_i)$对于所有的$i$都有意义，即$a_{init} + y_i > 0$（在这里数字5的作用实际上使得$a_{init} + y_i \geq 5$）
- 否则如果初始值使得部分$a_{init} + y_i \leq 0$，那么第一次估计时使用的样本就不包含那些$a_{init} + y_i \leq 0$的样本，估计就会有很大偏差。
- 所以在计算时初始值的选取是非常重要的，至少应该关注到参数的取值范围以及数据的取值范围，否则可能会犯很严重的错误。
- 可见估计的结果与真实值无异。

工具变量

- 注意上例中的矩条件，都是

$$\mathbb{E}\left[g\left(x_i\right)\cdot u_i\right]=0$$

的形式，不同的矩条件仅仅是选择了不同的$g\left(x_i\right)$。

- 我们可以把这些与u_i不相关的变量$z_i=g\left(x_i\right)$称为“工具变量”（**instrumental variables**，Reiersöl，1945，以及Sargan，1958）
- 而gmm命令可以使用工具变量选项简化以上估计命令，从而上例代码中的gmm命令可以直接改写为：

```
gmm (log({a='a_init'}+y)-{alpha=0}-{beta=0}*x),
    instruments(x*)
```

  - 其中gmm命令后面的括号里是计算$u_i=\ln\left(a+y_i\right)-\alpha+\beta x_i$的表达式，而instruments()选项中的x*代表了用所有以x开始的变量名作为工具变量进行估计。
  - 注意我们在这条命令中没有使用winit()选项，是因为instruments()选项有其默认的初始权重矩阵选项，所以无需额外提供。也正是由于初始矩阵的这一区别，导致了两种写法的估计结果有些许差别。

广义矩估计的一致性

而对于广义矩估计

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left[\sum_{i=1}^{N} g(w_i, \theta)\right]' \hat{\mathcal{W}} \left[\sum_{i=1}^{N} g(w_i, \theta)\right]$$

的一致性，考虑到权重矩阵$\hat{\mathcal{W}}$经常是一个估计的结果，所以我们需要在矩估计一致性的条件中额外加入一个假设：

最优权重矩阵的极限假定

假设$\hat{\mathcal{W}} \xrightarrow{p} \mathcal{W}_0$，其中$\mathcal{W}_0$为$G \times G$的正定矩阵。

那么可以保证广义矩估计也是一致估计量。

广义矩估计的渐进分布

现在考虑$\{w_i\}$独立同分布条件下广义矩估计的渐进分布。由于权重矩阵$\hat{\mathcal{W}}$是在优化之前事先给定的，所以当我们考虑最优化问题的一阶条件时，无需对$\hat{\mathcal{W}}$求导，从而目标函数的一阶导为

$$\frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]' \hat{\mathcal{W}} \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]}{\partial\theta} = 2\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g\left(w_i,\theta\right)}{\partial\theta}\right]' \hat{\mathcal{W}} \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]$$

其中

$$\frac{\partial g\left(w_i,\theta\right)}{\partial\theta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta_1} g_1\left(w_i,\theta\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\theta_K} g_1\left(w_i,\theta\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\theta_1} g_G\left(w_i,\theta\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\theta_K} g_G\left(w_i,\theta\right) \end{bmatrix}_{G\times K}$$

从而$\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g(w_i,\theta)}{\partial\theta'}\right]' \hat{\mathcal{W}} \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]$为$K\times 1$的列向量。一阶条件即

$$\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g\left(w_i,\hat{\theta}\right)}{\partial\theta'}\right]' \hat{\mathcal{W}} \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right] = 0$$

即可解得$\hat{\theta}$。

广义矩估计的渐进分布

现在我们可以仿照矩估计大样本性质的做法，对以上一阶条件进行泰勒展开。我们可以首先将一阶条件写为

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g\left(w_i,\hat{\theta}\right)}{\partial\theta'}\right]'\hat{\mathcal{W}}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]=0$$

其中根据一致性结论$\hat{\theta}\xrightarrow{p}\theta_0$，从而如果$g\left(w_i,\theta\right)$连续可微，有

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g\left(w_i,\hat{\theta}\right)}{\partial\theta'}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g\left(w_i,\theta_0\right)}{\partial\theta'}+o_p\left(1\right)\xrightarrow{p}\mathbb{E}\left[\frac{\partial g\left(w_i,\theta_0\right)}{\partial\theta'}\right]\triangleq\mathcal{G}_0$$

以及$\hat{\mathcal{W}}\xrightarrow{p}\mathcal{W}_0$，从而

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g\left(w_i,\hat{\theta}\right)}{\partial\theta'}\right]'\hat{\mathcal{W}}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]=\mathcal{G}_0'\mathcal{W}_0\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]+o_p\left(1\right)$$

广义矩估计的渐进分布

对$\mathcal{G}_0'\mathcal{W}_0\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]$进行泰勒展开，有

$$0=\mathcal{G}_0'\mathcal{W}_0\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]+\mathcal{G}_0'\mathcal{W}_0\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g\left(w_i,\theta_0\right)}{\partial\theta'}\right]\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)+o_p\left(1\right)$$

其中：

- $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g(w_i,\theta_0)}{\partial\theta}\xrightarrow{p}\mathcal{G}_0$
- 由于总体矩条件为$\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]=0$，根据中心极限定理：

$$\sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]\right)\qquad(2)$$

其中

$$\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]=\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]$$

广义矩估计的渐进分布

从而原式可以改写为

$$-\mathcal{G}_0'\mathcal{W}_0\mathcal{G}_0\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)=\mathcal{G}_0'\mathcal{W}_0\left[\sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]+o_p\left(1\right)$$
$$\overset{a}{\sim}N\left(0,\mathcal{G}_0'\mathcal{W}_0\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]\mathcal{W}_0\mathcal{G}_0\right)$$

如果记

$$A_0=\mathcal{G}_0'\mathcal{W}_0\mathcal{G}_0$$
$$B_0=\mathcal{G}_0'\mathcal{W}_0\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]\mathcal{W}_0\mathcal{G}_0$$

从而A_0为$K\times K$的对称矩阵，那么

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,A_0^{-1}B_0A_0^{-1}\right)$$

- $\hat{\theta}$的渐进方差为$\mathbb{V}\left(\hat{\theta}\right)=\frac{A_0^{-1}B_0A_0^{-1}}{N}$
- 上面的结论中我们要求A_0为可逆矩阵，要求$\text{rank}\left(\mathcal{G}_0\right)=K$。

最优权重矩阵

- 前面提到，使用不同的权重矩阵$\mathcal{W}$会得到不同的GMM估计$\hat{\theta}^{\mathcal{W}}$
- 虽然他们都是一致的，但是估计量的渐进方差是不相同的。
- 注意到在以上推导得到的GMM估计量的渐进方差中，A_0和B_0都与$\mathcal{W}_0$有关，那么怎样的$\mathcal{W}_0$会使得以上渐进方差达到最小呢？

最优权重矩阵

观察B_0的结构，如果我们取

$$\mathcal{W}^* = \left(\mathbb{V}\left[g\left(w_i, \theta_0\right)\right]\right)^{-1} = \left(\mathbb{E}\left[g\left(w_i, \theta_0\right) g\left(w_i, \theta_0\right)'\right]\right)^{-1}$$

那么

$$\begin{aligned} B_0 &= \mathcal{G}_0' \mathcal{W}^* \mathbb{E}\left[g\left(w_i, \theta_0\right) g\left(w_i, \theta_0\right)'\right] \mathcal{W}^* \mathcal{G}_0 \\ &= \mathcal{G}_0' \mathcal{W}^* \mathcal{W}^{*-1} \mathcal{W}^* \mathcal{G}_0 \\ &= \mathcal{G}_0' \mathcal{W}^* \mathcal{G}_0 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} A_0^{-1} B_0 A_0^{-1} &= \left(\mathcal{G}_0' \mathcal{W}^* \mathcal{G}_0\right)^{-1} \left(\mathcal{G}_0' \mathcal{W}^* \mathcal{G}_0\right) \left(\mathcal{G}_0' \mathcal{W}^* \mathcal{G}_0\right)^{-1} \\ &= \left(\mathcal{G}_0' \mathcal{W}^* \mathcal{G}_0\right)^{-1} \end{aligned}$$

此时，渐进方差应该为

$$\mathbb{V}\left(\hat{\theta}\right) = \frac{\left(\mathcal{G}_0' \mathcal{W}^* \mathcal{G}_0\right)^{-1}}{N}$$

最优权重矩阵

- 现在，取任意的$\mathcal{W}$，如果我们可以证明

$$\left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}^*\mathcal{G}_0\right)^{-1} \preceq \left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\mathcal{G}_0\right)^{-1}\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\mathcal{W}^{*-1}\mathcal{W}\mathcal{G}_0\left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\mathcal{G}_0\right)^{-1}$$

就可以证明使用$\mathcal{W}^*$所得到的渐进方差是最小的，从而$\hat{\theta}$的每个分量$\hat{\theta}_k$的方差都更小，从而标准误更小。

  - 对于实对称矩阵A, B，$A \succeq B$当且仅当$A^{-1} \preceq B^{-1}$，证明见Horn和Johnson（2013）的7.7节。

- 为了证明上式，只需要证明

$$\mathcal{G}_0'\mathcal{W}^*\mathcal{G}_0 \succeq \left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\mathcal{G}_0\right)\left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\mathcal{W}^{*-1}\mathcal{W}\mathcal{G}_0\right)^{-1}\left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\mathcal{G}_0\right)$$

或者

$$\mathcal{G}_0'\left[\mathcal{W}^* - \left(\mathcal{W}\mathcal{G}_0\right)\left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\mathcal{W}^{*-1}\mathcal{W}\mathcal{G}_0\right)^{-1}\left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\right)\right]\mathcal{G}_0 \succeq 0$$

等价的

$$\mathcal{W}^* - \left(\mathcal{W}\mathcal{G}_0\right)\left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\mathcal{W}^{*-1}\mathcal{W}\mathcal{G}_0\right)^{-1}\left(\mathcal{G}_0'\mathcal{W}\right) \succeq 0$$

上式成立（幂等矩阵）

最优权重矩阵

工具变量的最优权重矩阵

- 考虑工具变量的矩条件

$$\mathbb{E}\left[z_i \cdot u_i\left(\theta_0\right)\right] = 0$$

其中$u_i(\theta): \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$为未知参数的函数

  - 比如在ET Tobit例子中$u_i(\theta) = \ln(a + y_i) - \alpha - \beta x_i$

- 记$u_i = u_i(\theta_0)$为真实的误差项，z_i为$G \times 1$的工具变量。
- 我们可以计算，最优权重矩阵应该为

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^{*-1} &= \mathbb{E}\left[g\left(w_i, \theta_0\right) g\left(w_i, \theta_0\right)'\right] \\
&= \mathbb{E}\left(\left[z_i \cdot u_i\left(\theta_0\right)\right]\left[z_i \cdot u_i\left(\theta_0\right)\right]'\right) \\
&= \mathbb{E}\left(u_i^2 z_i z_i'\right)
\end{aligned}$$

最优权重矩阵

工具变量的最优权重矩阵

- 如果假设$\mathbb{E}\left(u_i^2|z_i\right)=\sigma^2$那么

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{*-1}&=\mathbb{E}\left(u_i^2z_iz_i'\right)\\&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(u_i^2z_iz_i'|z_i\right)\right]\\&=\sigma^2\mathbb{E}\left(z_iz_i'\right)\end{aligned}$$

实际上，σ^2为常数，不影响最优化，从而可以直接选取

$$\mathcal{W}^*=\left[\mathbb{E}\left(z_iz_i'\right)\right]^{-1}$$

- 而实践中可以使用

$$\hat{\mathcal{W}}^*=\left[\sum_{i=1}^N\left(z_iz_i'\right)\right]^{-1}$$

最优权重矩阵

工具变量的最优权重矩阵

- 如果令

$$Z = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_N' \end{bmatrix}_{N \times G}$$

那么最优权重矩阵可以写为$\hat{W}^* = (Z'Z)^{-1}$。

- 在Stata中，如果使用了instruments()选项，默认就是使用该权重矩阵作为初始权重矩阵，从而无需额外使用winit()选项。

最优权重矩阵

工具变量的最优权重矩阵

- 但是同时也需要注意到，这一权重矩阵只有在同方差的假设下才成立
- 如果使用两步法或者迭代GMM，可以首先使用$\hat{\mathcal{W}}_0 = (Z'Z)^{-1}$作为初始权重矩阵得到估计$\hat{\theta}^{(1)}$，然后计算

$$\hat{\mathcal{W}}_1 = \left(\sum_{i=1}^{N} \left[u_i^2 \left(\hat{\theta}^{(1)} \right) z_i z_i' \right] \right)^{-1}$$

作为最优权重矩阵的估计。

最小卡方统计量

- 现在我们讨论广义矩估计的目标函数

$$\Upsilon\left(\hat{\theta};w_i\right)=\left[\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]'\hat{\mathcal{W}}\left[\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]$$

  的渐进分布。
- 同样的，对于不同的权重矩阵，以上分布都是不一样的，我们只讨论使用了最优权重矩阵

$$\mathcal{W}^*=\left(\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)g\left(w_i,\theta_0\right)'\right]\right)^{-1}$$

  的情况。

最小卡方统计量

- 注意到，式(2)意味着

$$\sqrt{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta_0\right) \overset{a}{\sim} N\left(0,\mathcal{W}^{*-1}\right)$$

从而

$$\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta_0\right) \overset{a}{\sim} N\left(0,I_G\right)$$

其中I_G为$G\times G$的单位阵。

- 当然$\mathcal{W}^{*1/2}$是不可观测的，我们可以将其替换成其估计值$\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}=\mathcal{W}^{*1/2}+o_p\left(1\right)$，根据Slutsky定理，不改变渐进分布，从而

$$\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta_0\right) \overset{a}{\sim} N\left(0,I_G\right)$$

最小卡方统计量

根据上述结论，有

$$\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]'\hat{\mathcal{W}}^*\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]$$

$$=\left[\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]'\left[\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]$$

$$\overset{a}{\sim}\chi^2\left(G\right)$$

从而广义矩估计的目标函数在θ_0处应该渐进服从一个自由度为G的卡方分布：

$$\frac{1}{N}\Upsilon\left(\theta_0;w_i\right)\overset{a}{\sim}\chi^2\left(G\right)$$

最小卡方统计量

- 然而，以上结论仍然不是我们最终需要的。
- 注意到，该目标函数是关于θ_0而非$\hat{\theta}$的函数，而θ_0是未知的，我们只能在$\hat{\theta}$处计算目标函数值
- 那么$\frac{1}{N}\Upsilon\left(\hat{\theta};w_i\right)$与$\frac{1}{N}\Upsilon\left(\theta_0;w_i\right)$的分布相同吗？
- 答案是否定的。
- 比如，当$G=K$时，广义矩估计就变为矩估计，从而$\Upsilon\left(\hat{\theta};w_i\right)\equiv 0$，那么$\frac{1}{N}\Upsilon\left(\hat{\theta};w_i\right)$自然不会是一个$\chi^2(K)$分布。

最小卡方统计量

我们可以从$\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)$的渐进分布出发，由于$\hat{\theta}=\theta_0+o_p\left(1\right)$，从而如果将其带入，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)&=\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)+o_p\left(1\right)\right]\\&=\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}o_p\left(1\right)\\&=\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)+o_p\left(\sqrt{N}\right)\end{aligned}$$

这里可以看到，$\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)$与$\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)$之间并不是相差$o_p\left(1\right)$，那么

$$\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\overset{a}{\backsim}N\left(0,I_G\right)$$

从而$\frac{1}{N}\Upsilon\left(\hat{\theta};w_i\right)\overset{a}{\backsim}\chi^2\left(G\right)$。

最小卡方统计量

为了分析$\frac{1}{N}\Upsilon\left(\hat{\theta};w_i\right)$的渐进分布，我们可以将$\mathcal{W}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)$进行泰勒展开：

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\\
=&\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)+\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g\left(w_i,\theta_0\right)}{\partial\theta'}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)+o_p\left(1\right)\\
=&\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)+\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g\left(w_i,\theta_0\right)}{\partial\theta'}\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)+o_p\left(1\right)\\
=&\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)+\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\mathcal{G}_0\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)+o_p\left(1\right)
\end{aligned}$$

注意到其中第二项，有：

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)=-\left(\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^*\mathcal{G}_0\right)^{-1}\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^*\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]+o_p\left(1\right)$$

最小卡方统计量

从而

$$\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)$$

$$=\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)$$

$$-\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\mathcal{G}_0\left(\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^{*}\mathcal{G}_0\right)^{-1}\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^{*}\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]+o_p\left(1\right)$$

$$=\left[\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}-\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\mathcal{G}_0\left(\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^{*}\mathcal{G}_0\right)^{-1}\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^{*}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]+o_p\left(1\right)$$

$$=\left[I_G-\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\mathcal{G}_0\left(\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^{*}\mathcal{G}_0\right)^{-1}\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\right]\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]+o_p\left(1\right)$$

最小卡方统计量

令$\mathcal{D}=\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\mathcal{G}_0$为$G\times K$的矩阵，那么

$$I_G-\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\mathcal{G}_0\left(\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^*\mathcal{G}_0\right)^{-1}\mathcal{G}_0'\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}=I_G-\mathcal{D}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)^{-1}\mathcal{D}'$$

其中

$$\mathcal{D}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)^{-1}\mathcal{D}'\times\mathcal{D}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)^{-1}\mathcal{D}'=\mathcal{D}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)^{-1}\mathcal{D}'$$

从而$\mathcal{D}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)^{-1}\mathcal{D}'$是一个幂等矩阵，且

$$\mathsf{tr}\left(\mathcal{D}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)^{-1}\mathcal{D}'\right)=\mathsf{tr}\left(\left(\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)^{-1}\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)=\mathsf{tr}\left(I_K\right)=K$$

由此得出$\mathsf{tr}\left(I_G-\mathcal{D}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)^{-1}\mathcal{D}'\right)=G-K$。

最小卡方统计量

现在，使用类似的方法，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\Upsilon\left(\hat{\theta};w_i\right) &= \left[\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]'\left[\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]+o_p\left(1\right)\\ &= \left[\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]'\left(I_G-\mathcal{D}\left(\mathcal{D}'\mathcal{D}\right)^{-1}\mathcal{D}'\right)\left[\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\right]\end{aligned}$$

其中$\hat{\mathcal{W}}^{*1/2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta_0\right)\overset{a}{\sim}N\left(0,I_G\right)$，从而有

$$\frac{1}{N}\Upsilon\left(\hat{\theta};w_i\right)\overset{a}{\sim}\chi^2\left(G-K\right)$$

即GMM的目标函数渐进服从自由度为$G-K$的卡方分布（Hanson，1982）。

- 当$G=K$，即GMM退化为矩估计的情况下，$\frac{1}{N}\Upsilon\left(\hat{\theta};w_i\right)=0$，同时其分布自由度也变为0。

最小卡方统计量

- 需要特别注意的是，只有当使用最优权重矩阵$\mathcal{W}^*$时，以上结论才是成立的！
- 而实际应用中，需要将$\mathcal{W}^*$替换为其估计

$$\hat{\mathcal{W}}^*\left(\hat{\hat{\theta}}\right)=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\hat{\hat{\theta}}\right)g\left(w_i,\hat{\hat{\theta}}\right)'\right]\right)^{-1}=N\left(\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\hat{\hat{\theta}}\right)g\left(w_i,\hat{\hat{\theta}}\right)'\right]\right)^{-1}$$

其中$\hat{\hat{\theta}}$为要给事前的GMM估计。

- 当使用最优权重矩阵估计时，GMM估计量最小化

$$\Upsilon\left(\theta;w_i\right)=\left[\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta\right)\right]'\hat{\mathcal{W}}^*\left(\hat{\hat{\theta}}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta\right)\right]$$

最小卡方统计量

- 或者等价的，最小化

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\Upsilon\left(\theta;w_i\right) &= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]' \hat{\mathcal{W}}^{*}\left(\hat{\hat{\theta}}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right] \\
&= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]' \hat{\mathcal{W}}^{*}\left(\hat{\hat{\theta}}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right] \\
&= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]' N\left(\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\hat{\hat{\theta}}\right) g\left(w_i,\hat{\hat{\theta}}\right)'\right]\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]' \left(\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\hat{\hat{\theta}}\right) g\left(w_i,\hat{\hat{\theta}}\right)'\right]\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right] \\
&\triangleq \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]' \hat{\Xi}\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\theta\right)\right]
\end{aligned}
$$

最小卡方统计量

- 以上目标函数最优化后得到的估计量

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left[\sum_{i=1}^{N} g(w_i, \theta)\right]' \hat{\Xi} \left[\sum_{i=1}^{N} g(w_i, \theta)\right]$$

即使用最优权重矩阵的估计量，可以成为最优GMM估计量（optimal GMM estimator）

- 同时由于以上目标函数在估计值处服从一个自由度为$G-K$的卡方分布：

$$\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \hat{\theta}\right)\right]' \hat{\Xi} \left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i, \hat{\theta}\right)\right] \overset{a}{\sim} \chi^2(G-K)$$

从而以上估计量也被称为最小卡方估计量（minimum chi-square estimator）。

GMM目标函数的模拟

GMM_mini_chi2.do